



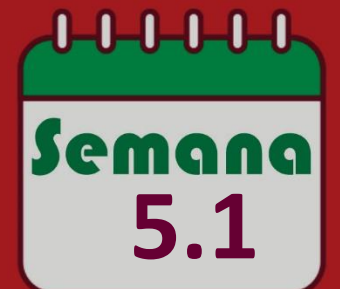
ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA VALOR ABSOLUTO

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



VALOR ABSOLUTO

Definición.

El valor absoluto de un número real a , denotado por $|a|$, se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

1. $|-14| = 14$
2. $|3^7 - 5^7| = -(3^7 - 5^7) = -3^7 + 5^7$
3. $|x^2 - 6x + 12| = x^2 - 6x + 12$
4. $|\cos x - 5| = -(\cos x - 5) = -\cos x + 5$
5. $|\cos x - 5 + 2\operatorname{sen}2x| = 5 - \cos x - 2\operatorname{sen}2x$

VALOR ABSOLUTO

Teoremas

Siendo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1. $|a| \geq 0$

2. $|ab| = |a||b|$

3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

4. $|-a| = |a|$

5. $|a - b| = |b - a|$

6. $|a| \geq a \wedge |a| \geq -a$

7. $|a| \geq b \wedge |a| \geq -b \rightarrow |a| \geq |b|$

8. $|a^2| = |a|^2$

9. $\sqrt{a^2} = |a|$

10. $|a| + |b| = 0 \leftrightarrow a = b = 0$

11. $\min \{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

12. $\max \{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$

13. $-|a| \leq a \leq |a|$

14. $|a + b| \leq |a| + |b|$

15. $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

VALOR ABSOLUTO

Ejemplos

1. La ecuación $|x + 2| + 5 = 0$ no tiene solución. ¿Por qué?

Pues: $|x + 2| \geq 0$, no existe x tal que $|x + 2| = -5$.

2. La ecuación $|x| - x = 0$ tiene infinitas soluciones. ¿Por qué?

Cualquier x número no negativo es solución.

3. La ecuación $|x| + 2x = 0$ tiene una única solución. ¿Por qué?

La única solución es 0.

4. La ecuación $|x| + |x + 3| = 0$ no tiene solución. ¿Por qué?

No hay un valor de x para el cual se anulan ambos sumandos.

VALOR ABSOLUTO

Ejemplo

Demostrar que $|ab| = |a||b|$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$

Demostración

$$|ab| = \begin{cases} ab & , \quad \text{si } a \geq 0 \wedge b \geq 0 \\ ab & , \quad \text{si } a \leq 0 \wedge b \leq 0 \\ -ab & , \quad \text{si } a \leq 0 \wedge b \geq 0 \\ -ab & , \quad \text{si } a \geq 0 \wedge b \leq 0 \end{cases}$$

De donde allí tendremos:

$$|ab| = \begin{cases} |a||b|, & \text{si } a \geq 0 \wedge b \geq 0 \\ |a||b|, & \text{si } a \leq 0 \wedge b \leq 0 \\ |a||b|, & \text{si } a \leq 0 \wedge b \geq 0 \\ |a||b|, & \text{si } a \geq 0 \wedge b \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore |ab| = |a||b|$$

VALOR ABSOLUTO

Ejemplo

Demostrar que $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a; b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Demostración

$$a = \left(\frac{a}{b} \right) b \rightarrow |a| = \left| \left(\frac{a}{b} \right) b \right|$$

Por la demostración anterior

$$|a| = \left| \frac{a}{b} \right| |b|$$

Despejando tendremos:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Ejemplo

Halle el valor de x tal que

$$|x^2 + x - 2| + |x^2 - x - 6| = 0$$

Solución

De la ecuación, por el teorema 10:

$$x^2 + x - 2 = 0 \wedge x^2 - x - 6 = 0$$

Así tenemos por la formula general para una ecuación cuadrática:

$$x = -2, 1 \wedge x = -2; 3$$

De donde $x = -2$.

Luego: CS= $\{-2\}$

VALOR ABSOLUTO

Ejemplo

Halle el valor de x tal que

$$x^2 + 2|x| = 15$$

Solución

- Si $x \geq 0$:
 $x + 2x - 15 = 0 \rightarrow x = 3$
La otra raíz -5 es descartada
pues es negativa.
- Si $x < 0$:
 $x - 2x - 15 = 0 \rightarrow x = -3$
La otra raíz 5 es descartada
pues es positiva.
CS= $\{-3; 3\}$

Ecuaciones con valor absoluto

VALOR ABSOLUTO

Teorema

Siendo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

1. $|x| = y \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge (x = y \vee x = -y)$
2. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$

Ejemplo

Halle el valor de x tal que $|2x - 1| = |x + 1|$

Resolución

$$2x - 1 = x + 1 \vee 2x - 1 = -x - 1$$

$$CS = \{0; 2\}$$

Ejemplo: (Ejercicio 124)**VALOR ABSOLUTO**

Hallar la suma de raíces de la ecuación $x^2 + 2x + 3 = 3|x + 1|$

Resolución

El ejercicio se puede reescribir como: $|x + 1| = \frac{x^2 + 2x + 3}{3}$

Por el teorema 1:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{3} \geq 0 \wedge \left(x + 1 = \frac{x^2 + 2x + 3}{3} \vee x + 1 = -\frac{x^2 + 2x + 3}{3} \right)$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 - x = 0 \vee x^2 + 5x + 6 = 0)$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge \{ x(x - 1) = 0 \vee (x + 3)(x + 2) = 0 \}$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge (x = 0 \vee x = 1 \vee x = -3 \vee x = -2)$$

$$CS = \{-3; -2; 0; 1\}$$

La suma de raíces pedida será: $-3 + -2 + 0 + 1 = -4$

Inecuaciones con valor absoluto

Teorema

Siendo $x, y \in R$ se cumple que

$$1. |x| < y \Leftrightarrow y > 0 \wedge (-y < x < y)$$

$$2. |x| \leq y \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge (-y \leq x \leq y)$$

$$3. |x| > y \Leftrightarrow x < -y \vee y < x$$

$$4. |x| \geq y \Leftrightarrow x \leq -y \vee y \leq x$$

$$5. |x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$$

$$6. |x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$$

VALOR ABSOLUTO

Ejemplos

1. La inecuación $|x + 3| < x - 4$

No tiene solución. ¿Por qué?

2. La inecuación $|x^2 + 5x - 10| > -1$

tiene como CS a $\langle -\infty; +\infty \rangle$. ¿Por qué?

En conclusión, se recomienda la técnica de encontrar el conjunto solución de una inecuación mediante la técnica de los puntos referenciales y así encontrar el conjunto solución por zonas.

VALOR ABSOLUTO

Ejemplo

Determinar el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{|2x + 6| - |x|}{|x + 2| - |x - 3|} \leq 0$$

Resolución

Sabiendo que $|2x + 6| + |x| > 0$ y $|x + 2| + |x - 3| > 0$, luego:

$$\left(\frac{|2x + 6| - |x|}{|x + 2| - |x - 3|} \right) \left(\frac{|2x + 6| + |x|}{|x + 2| + |x - 3|} \right) \leq 0$$

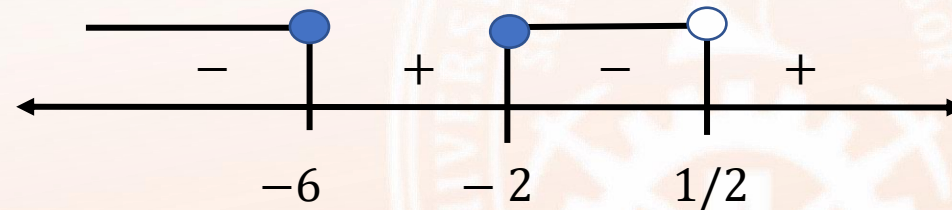
$$\Rightarrow \frac{(2x + 6)^2 - (x)^2}{(x + 2)^2 - (x - 3)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x + 6 - x)(2x + 6 + x)}{(x + 2 - x + 3)(x + 2 + x - 3)} \leq 0$$

VALOR ABSOLUTO

$$\Rightarrow \frac{(x + 6)(3x + 6)}{(5)(2x - 1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 6)(x + 2)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} \leq 0$$



$$CS = < -\infty; -6] \cup [-2; \frac{1}{2} >$$

VALOR ABSOLUTO

Ejemplo: (Ejercicio 128)

Si S es el conjunto solución de la inecuación $\left| \frac{2x-5}{x+1} \right| > 1$, entonces halle

$n(S^c \cap \mathbb{N})$

Resolución

Por el teorema 3

$$\frac{2x-5}{x+1} > 1 \vee \frac{2x-5}{x+1} < -1$$

$$\frac{x-6}{x+1} > 0 \vee \frac{3x-4}{x+1} < 0$$

$$x \in (< -\infty; -1 > \cup < 6; +\infty >) \cup \left\langle -1; \frac{4}{3} \right\rangle$$

$$S = < -\infty; -1 > \cup \left\langle -1; \frac{4}{3} \right\rangle \cup < 6; +\infty >$$

De ahí que

$$S^c = \left[\frac{4}{3}; 6 \right] \cup \{-1\} \Rightarrow S^c \cap \mathbb{N} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

Finalmente, $n(S^c \cap \mathbb{N}) = 5$

Ejemplo: (Ejercicio 129)

VALOR ABSOLUTO

Resuelva la inecuación $\left| \frac{x-3}{x-1} \right| \leq \frac{6}{x-1}$

Resolución

Por el teorema 2

$$\frac{6}{x-1} \geq 0 \wedge \left(-\frac{6}{x-1} \leq \frac{x-3}{x-1} \leq \frac{6}{x-1} \right)$$

$$x > 1 \wedge \left(0 \leq \frac{x+3}{x-1} \wedge \frac{x-9}{x-1} \leq 0 \right)$$

$$x > 1 \wedge (x \in \langle -\infty; -3] \cup \langle 1; +\infty \rangle \wedge x \in \langle 1; 9])$$

Interceptando

$$CS = \langle 1; 9]$$

VALOR ABSOLUTO

Interpretación geométrica

Definición

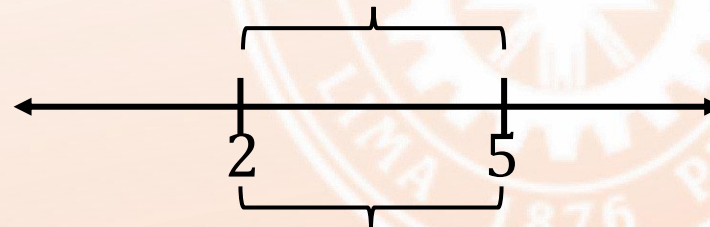
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ la distancia entre estos puntos en la recta numérica real se denota por $d(a; b)$ y se define por

$$d(a; b) = |a - b|$$

Ejemplo

Sean los puntos $a = 2$ y $b = 5$ ubicados en la recta, entonces la distancia entre ellos es

$$d(2; 5) = |5 - 2| = |3 - 5| = 3$$



Distancia entre 2 y 5

VALOR ABSOLUTO

Ejemplo

Si $[a, b]$ es el conjunto solución de $|x + 2| + |x - 4| \leq 8$.

Halle $|a| + |b|$

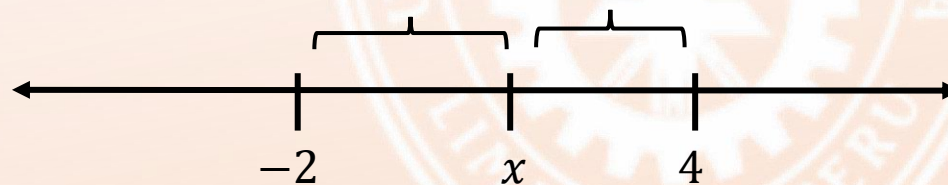
Resolución

$$|x + 2| + |x - 4| \leq 8$$



1° Caso: $x \in [-2; 4]$:

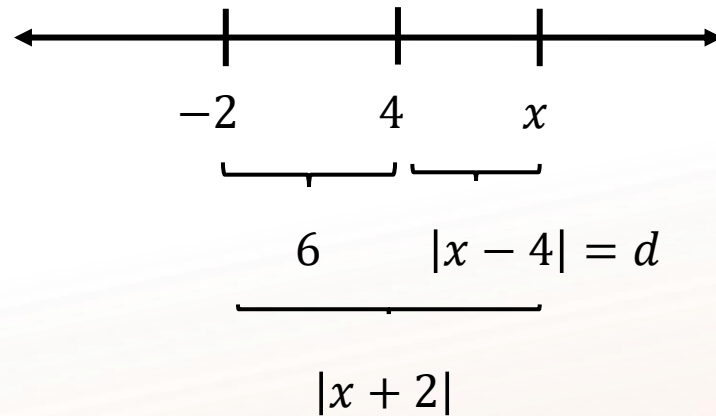
$$|x + 2| + |x - 4| = 6 < 8$$



Cualquier "x" cumple.

VALOR ABSOLUTO

2° Caso: $x > 4$



Como:

$$|x + 2| + |x - 4| \leq 8$$

El mayor "x" se da cuando

$$|x + 2| + |x - 4| = 8$$

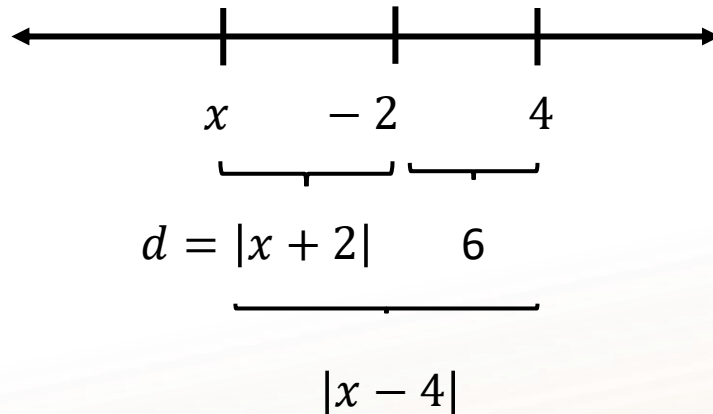
Sea $|x - 4| = d$

$$\Rightarrow |x + 2| + |x - 4| = (6 + d) + d = 8 \Rightarrow d = 1$$

$\therefore$ En $4 + d = 4 + 1 = 5$ cerrado por la derecha).

VALOR ABSOLUTO

3° Caso: $x < -2$



Como:

$$|x + 2| + |x - 4| \leq 8$$

El menor " x " se da cuando

$$|x + 2| + |x - 4| = 8$$

Sea $|x + 2| = d$

$$\Rightarrow |x + 2| + |x - 4| = d + (6 + d) = 8 \Rightarrow d = 1$$

$\therefore$ En $-2 - 1 = -3$ (cerrado por la izquierda).

De ahí que $[a; b] = [-3; 5]$ es el conjunto solución de dicha inecuación.

$$\text{Piden } |a| + |b| = |-3| + |5| = 8$$

VALOR ABSOLUTO

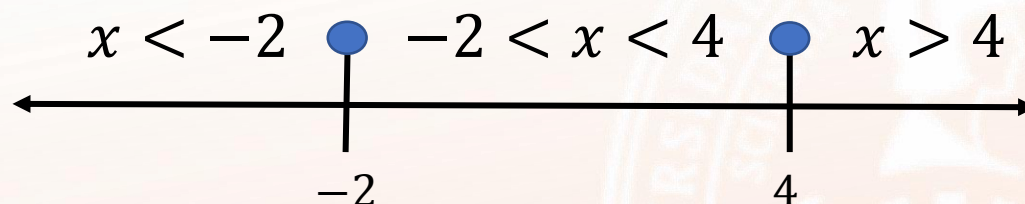
Ejemplo

Si $[a; b]$ es el conjunto solución de $|x + 2| + |x - 4| \leq 8$.

Halle $|a| + |b|$

Resolución

Desarrollemos este ejemplo por zonas:



Zona I: $x \leq -2$

$$* x + 2 \leq 0 \quad \wedge \quad x - 4 \leq -6$$

$$\text{Luego: } |x + 2| + |x - 4| \leq 8$$

$$\Rightarrow -(x + 2) + (-(x - 4)) \leq 8 \quad \Rightarrow -x - 2 - x + 4 \leq 8 \quad \Rightarrow x \geq -3$$

$$CS_I = < -\infty; -2] \cap [-3; +\infty > \Rightarrow CS_I = [-3; -2]$$

VALOR ABSOLUTO

Zona II: $-2 < x < 4$

$$* x + 2 > 0 \quad \wedge \quad x - 4 < 0$$

Luego: $|x + 2| + |x - 4| \leq 8$

$$\Rightarrow (x + 2) + (-(x - 4)) \leq 8 \quad \Rightarrow x + 2 - x + 4 \leq 8 \quad \Rightarrow 6 \leq 8$$

De ahí que $x \in \mathbb{R}$

$$CS_{II} = < -2; 4 > \cap \mathbb{R} \quad \Rightarrow CS_{II} = < -2; 4 >$$

Zona III: $x \geq 4$

$$* x + 2 \geq 6 \quad \wedge \quad x - 4 \geq 0$$

Luego: $|x + 2| + |x - 4| \leq 8$

$$\Rightarrow (x + 2) + (x - 4) \leq 8 \quad \Rightarrow x + 2 + x - 4 \leq 8 \quad \Rightarrow 2x - 2 \leq 8 \quad \Rightarrow x \leq 5$$

$$CS_{III} = [4; +\infty > \cap < -\infty; 5] \quad \Rightarrow CS_{III} = [4; 5]$$

VALOR ABSOLUTO

Finalmente, el conjunto solución CS estará dado por:

$$\begin{aligned} \text{CS} &= \text{CS}_I \cup \text{CS}_{II} \cup \text{CS}_{III} \\ &= [-3; -2] \cup < -2; 4 > \cup [4; 5] \\ &= [-3; 5] \end{aligned}$$

Del enunciado:

$$\begin{aligned} \text{CS} &= [a; b] = [-3; 5] \\ \Rightarrow a &= -3; \quad b = 5 \end{aligned}$$

Se pide:

$$|a| + |b| = |-3| + |5| = 8$$

VALOR ABSOLUTO

Ejercicio 1

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $\forall x \in \mathbb{R}: |-x| = |x|$

II. $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = |x| + |x-2|$

III. Si $x \in \langle -3; -2 \rangle$, entonces $\frac{|5x-20| - |3x-20|}{x}$ es igual a 2

A)VVV

B)VVF

C)VFV

D)FFV

E)FFF

VALOR ABSOLUTO

Ejercicio 2

Resuelva $|x - \max\{1; 2x\}| \leq 1$

A) $CS = [0; 2]$
E) $CS = \mathbb{R}$

B) $CS = [0; 1]$

C) $CS = [0; 2]$

D) $CS = [0; 1]$